Théorème :

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel de dimension finie.
Tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.
De plus, si $\dim F = \dim E$ alors $F = E$.

Démonstration :

Si $F = \left\{\vec{0}\right\}$, le résultat énoncé est correct.

Sinon, soit $L = \left\{n \in \mathbb{N}^* \text{ tel qu'il existe une famille libre formée de } n \text{ vecteurs de } F\right\}$.

Montrons que cette partie L possède un plus grand élément.

Comme $F \neq \left\{\vec{0}\right\}$, F possède un vecteur non nul $\vec{x}$ et la famille $(\vec{x})$ est alors libre. Par suite $L \neq \varnothing$ puisque $1 \in L$.

Comme E est de dimension finie, tout famille libre de vecteurs de E est formée d'au plus $\dim E$ éléments ; il s'en suit que la partie L est majorée par $\dim E$.

Ainsi L apparaît comme étant une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}^*$ et donc admet un plus grand élément n tel que $1 \leq n \leq \dim E$.

Nous pouvons alors affirmer que :

+ Sachant $n \in L$, il existe une famille libre $\mathcal{B} = (\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)$ formée de n vecteurs de F.

+ Sachant $n+1 \notin L$, toute famille formée de $n+1$ vecteurs de F est liée.

Montrons alors que $\mathcal{B}$ forme une base de F.

La famille $\mathcal{B}$ est libre par construction, il reste à voir que celle-ci est génératrice.

Soit $\vec{x} \in F$, montrons que $\vec{x}$ est combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.

Comme la famille $(\vec{e}_1,...,\vec{e}_n,\vec{x})$ est formée de $n+1$ vecteurs de F, elle est liée i.e. :

$\exists(\lambda_1,...,\lambda_n,\mu) \neq (0,...,0,0)$ tel que $\lambda_1.\vec{e}_1 + ... + \lambda_n.\vec{e}_n + \mu.\vec{x} = \vec{0}$.

Montrons que $\mu \neq 0$.

Par l'absurde, si $\mu = 0$ alors on a $\lambda_1.\vec{e}_1 + ... + \lambda_n.\vec{e}_n = \vec{0}$ avec $(\lambda_1,...,\lambda_n) \neq (0,...,0)$

Or la famille $(\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)$ est libre. Absurde !

Sachant $\mu \neq 0$, la relation $\lambda_1.\vec{e}_1 + ... + \lambda_n.\vec{e}_n + \mu.\vec{x} = \vec{0}$ permet d'écrire $\vec{x} = \left(-\frac{\lambda_1}{\mu}\right).\vec{e}_1 + ... + \left(-\frac{\lambda_n}{\mu}\right).\vec{e}_n$ et par conséquent le vecteur $\vec{x}$ est bien combinaison linéaire des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

Finalement $\mathcal{B}$ est bien une base de F et par suite F est un espace vectoriel de dimension finie avec $\dim F = n \leq \dim E$.

De plus :

Si $\dim F = \dim E$ alors une base de F est aussi une famille libre formée de $\dim F = \dim E$ vecteurs de E, c'est donc aussi une base de E, par suite $F = E$.